

Лекция 11.

Методы приближенных вычислений для уточнения корня (начало)

Для того, чтобы найти значение корня функции $y=f(x)$ вовсе не обязательно искать обратную функцию $x=f^{-1}(y)$, существуют методы приближенного вычисления, которые позволяют вычислить корень¹ с заданной точностью имея начальное приближение или отрезок.

Приближенные методы существуют не только для уточнения корня.

Задание Лабораторной работы №8:

Двумя методами (см. таблицу 1) для N значений погрешности² ε (0,1; 0,01; 0,001; ... $1e-N$, $1 \leq N \leq 10$) вычислить значение корня для двух заданных функций (№ и №+3) на отрезке $[A, B] \subset (0,2)$ и вывести их в виде таблицы (для каждой функции отдельную):

Номер функции Погрешность	Название метода		Название метода	
	Корень	Итераций	Корень	Итераций
0,1				
...				
0,0...1				

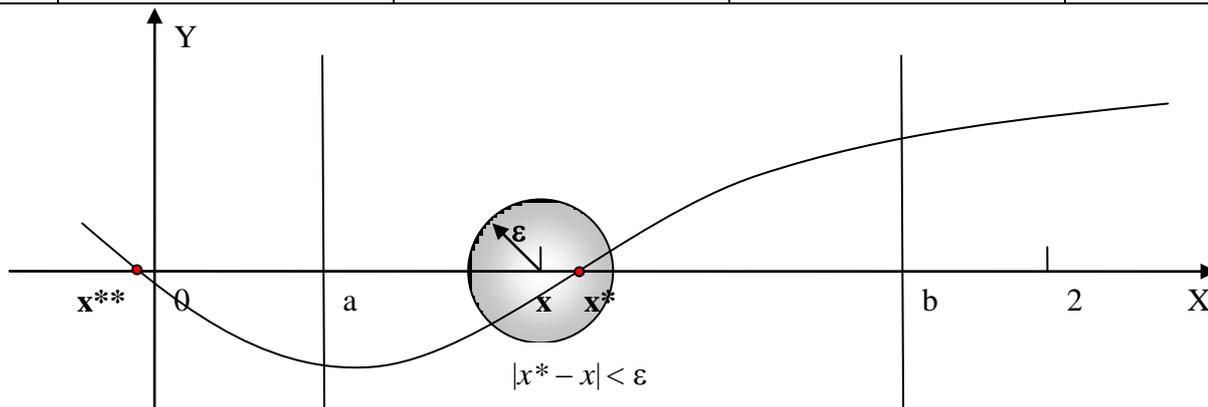
При вводе значений анализировать аномалии: A, B, N – числа и $0 < A < B < 2$, $1 \leq N \leq 10$.

Перед поиском корня обязательно **проверять наличие корня** на отрезке $[A, B]$ (разные знаки значения функции на концах отрезка).

Для самопроверки: 1) для каждой функции указан примерный корень для проверки написания заданной функции, и 2) корни, найденные разными методами с одинаковой точностью не должны отличаться больше, чем на эту точность.

Табл.1. Выбор метода

М Е Т О Д Ы	1)Метод деления отрезка пополам			
	2) метод простых итераций	2) метод Ньютона (касательных)	2) метод секущих	2) метод хорд
	1	2	3	4
	$N \% 4 == 1$	$N \% 4 == 2$	$N \% 4 == 3$	$N \% 4 == 0$

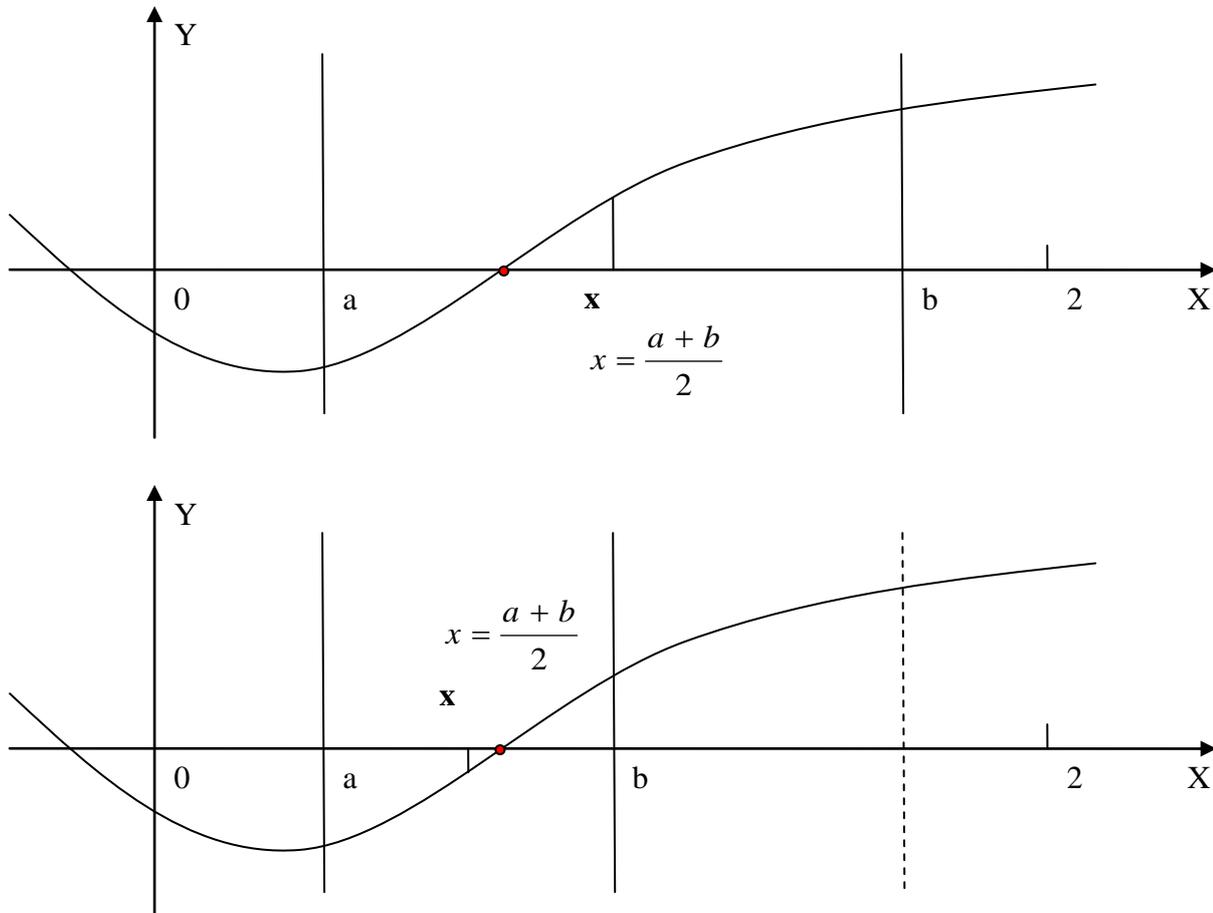


¹ Корнем уравнения $f(x)=0$ является такое, возможно не единственное, значение $x = x^*$, при котором имеет место тождество $f(x^*) = 0$.

² Найти корень с заданной допустимой погрешностью – значит найти такое приближенное значение корня x , которое мало отличается от точного значения корня x^* , так что выполняется неравенство $|x^* - x| < \varepsilon$, где ε – малая положительная величина – допустимая ошибка, которую мы можем заранее задать по своему усмотрению см. рис. 1.

1. Метод проб (метод деления отрезка пополам)

Рис. 2 иллюстрирует метод половинного деления, который состоит в постепенном сужении отрезка поиска корня до заданной величины ε . На каждом шаге отрезок уменьшается вдвое.



В начале каждой итерации находим середину нового отрезка $[a, b]$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Затем следует определить, с какой стороны от середины отрезка x находится корень x^* . Для этого достаточно сравнить знаки $f(x)$ и $f(b)$ или знаки $f(x)$ и $f(a)$.

Если знаки $f(x)$ и $f(b)$ не совпадают, то это означает, что $f(x)$ пересекает ось x на правом полуотрезке $[x, b]$. Следовательно, корня нет на левом полуотрезке $[a, x]$, и этот полуотрезок можно отбросить, то есть можно перенести левую границу a в среднюю точку x (заменить значение приближения a на значение x).

Если же знаки $f(x)$ и $f(b)$ совпадают, то $f(x)$ пересекает ось x на левом полуотрезке $[a, x]$ и, следовательно, корня нет на правом полуотрезке $[x, b]$, и этот полуотрезок можно отбросить, то есть можно перенести правую границу b в среднюю точку x (заменить значение приближения b на значение x).

Итак, в результате выполнения итерации отрезок $[a, b]$ как и прежде, содержит единственный корень, но его длина стала меньше в два раза.

Вычисления следует прекратить, если на очередном шаге длина отрезка $[a, b]$ станет меньше ε . Тогда с точностью ε любая точка этого отрезка будет являться корнем уравнения $f(x)$, а середина этого отрезка – с точностью $\varepsilon/2$.

Совпадение знаков $f(x)$ и $f(b)$ можно проверить, проверив неравенство

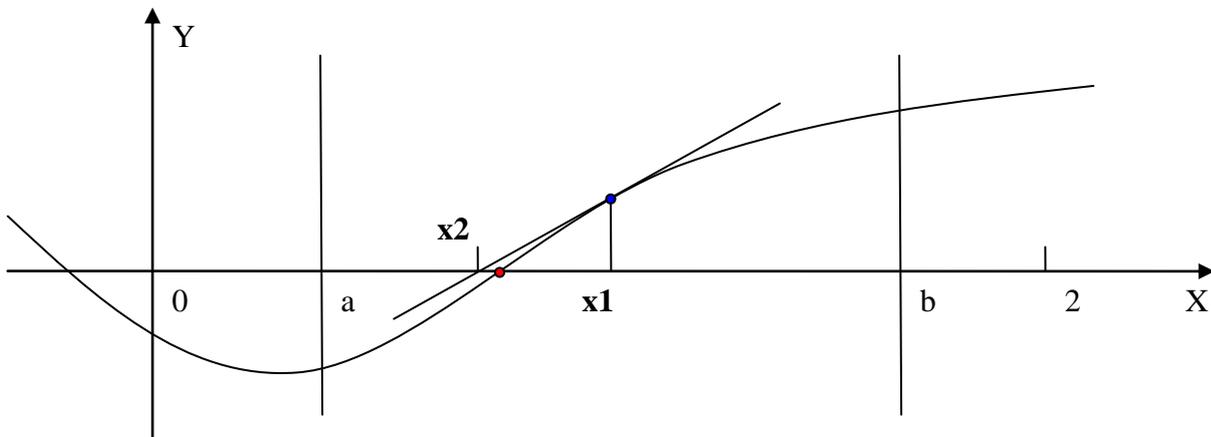
$$f(x) \cdot f(b) > 0 \quad (1)$$

поскольку произведение двух чисел с одинаковыми знаками дает положительное значение.

2. Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть имеется начальное приближение к корню, которое обозначим x_1 . Например, можно взять середину отрезка $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a + b}{2}$$



Проведем касательную к графику $y = f(x)$ в точке с координатами $(x_1, f(x_1))$. Новое приближение к корню, которое мы будем называть следующим приближением, x_2 получим как точку пересечения этой касательной с осью абсцисс. Это правило приводит к следующей расчетной формуле:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (2)$$

При соблюдении некоторых условий (они называются условиями сходимости), которые будут перечислены ниже, строго доказано, что приближение x_2 находится ближе к корню, чем приближение x_1 .

Теперь заменим значение начального приближения x_1 на значение только что полученного приближения x_2 . Мы пришли к той же самой задаче, но теперь начальное приближение расположено ближе к корню, чем до его изменения на x_2 . Каждое такое улучшение приближения к корню за счет вычисления следующего приближения называется итерацией.

Сколько нужно выполнить итераций, чтобы нас могла устроить точность приближение x_2 к значению корня x^* ?

Обычно считают, что требуемая точность достигнута, если после вычисления x_2 при выполнении очередной итерации соблюдается условие

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon$$

При выполнении этого неравенства итерационный процесс уточнения корня следует прекратить и в качестве искомого приближенного значения корня взять x_2 .

Смысл условий сходимости метода Ньютона состоит в том, что 1) начальное приближение x_1 , используемое при выполнении первой итерации, должно быть не слишком далеко от корня, а 2) производная $f'(x)$, которая находится в знаменателе, должна изменяться на отрезке $[a, b]$ не очень быстро и не обращаться в ноль ни в одной точке отрезка $[a, b]$. Мы будем считать, что они выполняются.

Метод Ньютона является наиболее быстрым среди численных методов вычисления корня функционального уравнения. На практике необходимая точность достигается буквально после выполнения нескольких (не более 10) итераций.

Для вычисления входящей в формулу (2) производной $f'(x)$ можно воспользоваться выражением для ее приближительного вычисления при малом значении ε :

$$f'(x) \approx \frac{f(x + \varepsilon/2) - f(x - \varepsilon/2)}{(x + \varepsilon/2) - (x - \varepsilon/2)} = \frac{f(x + \varepsilon/2) - f(x - \varepsilon/2)}{\varepsilon} \quad (3)$$

3.Метод секущих

Метод секущих, в отличие от метода Ньютона, использует не одно, а два начальных приближения, которые мы обозначим соответственно x_1 и x_2 , чтобы найти третье x_3 .

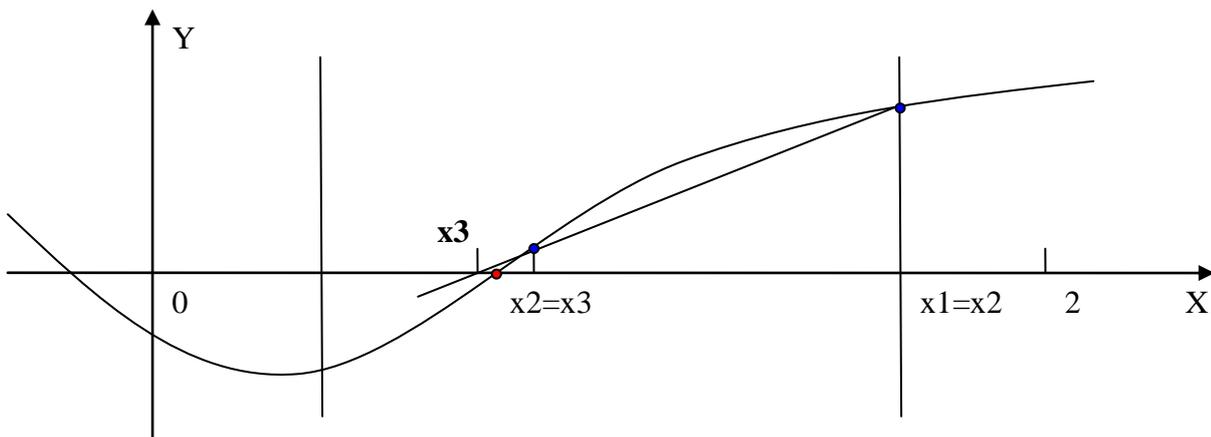
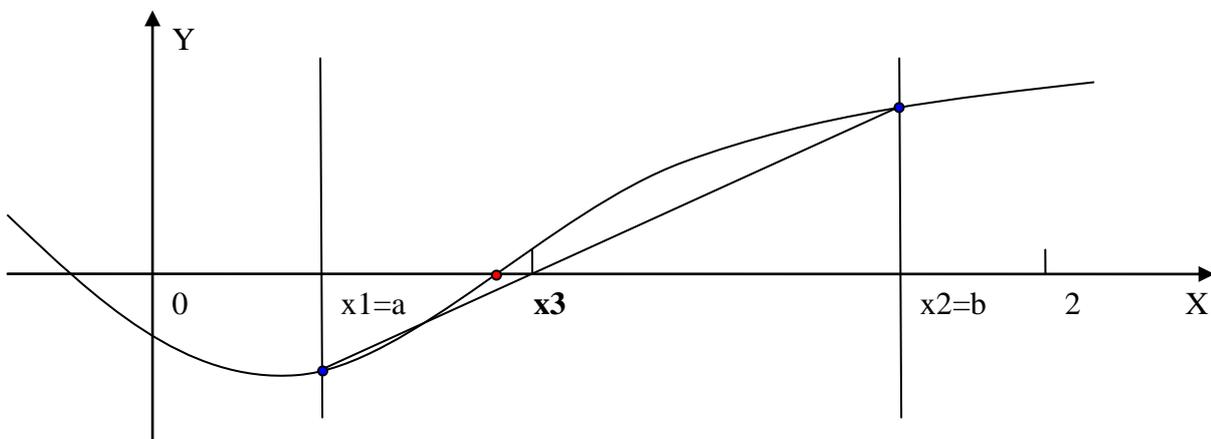
За начальные значения x_1 и x_2 берутся соответственно a и b . Третья точка находится как точка пересечения отрезка, проведенного между точками $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$ по формуле:

$$x_3 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}} \quad (4)$$

Из трех приближений к корню оставим два последних (отбрасываем самое старое x_1). В методе секущих это делается по следующему правилу:

$$x_1 = x_2; \quad x_2 = x_3$$

После чего можно заново искать третье значение по формуле (4).



Выполнение итераций можно прекратить при выполнении условия:

$$|x_3 - x_2| < \varepsilon$$

а полученное значение приближения x_3 взять в качестве искомого значения корня.

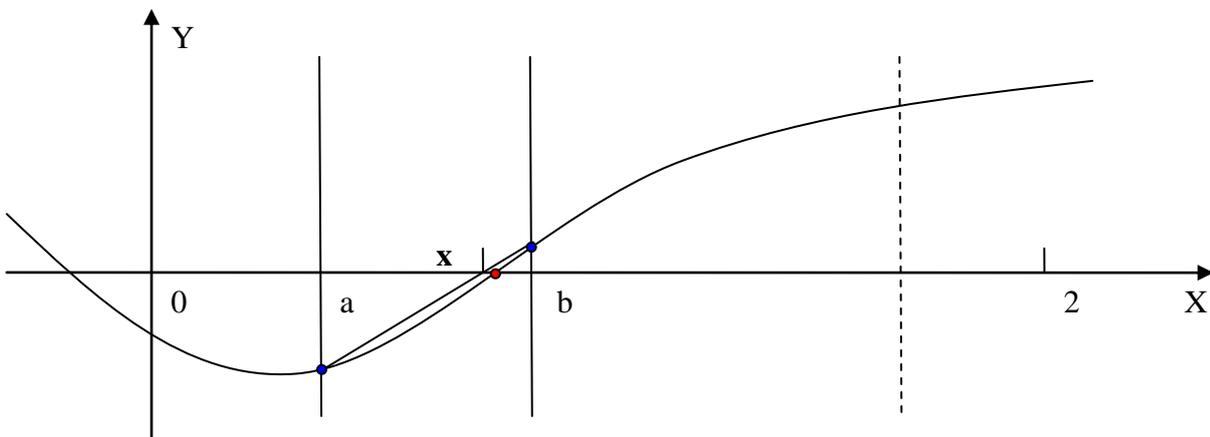
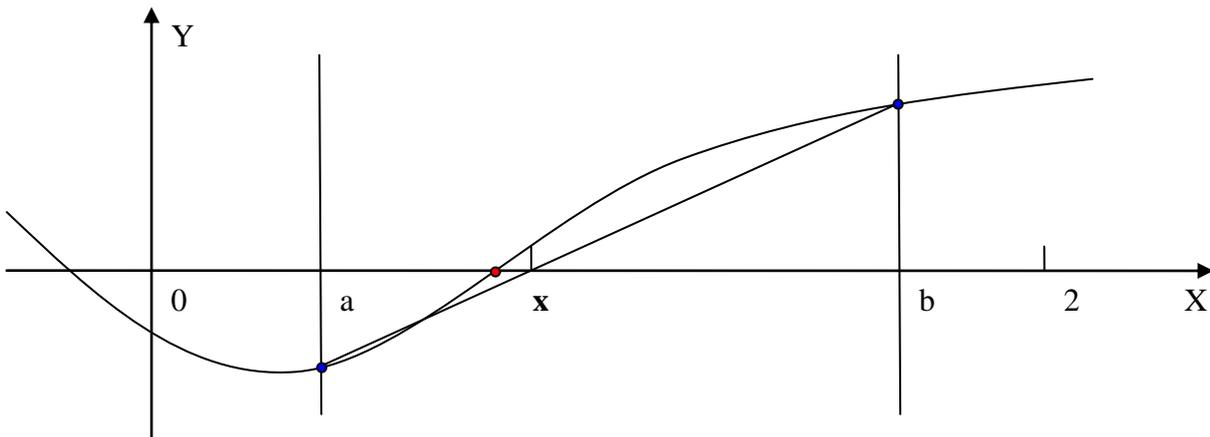
Обратите внимание на то, что формула (4) имеет много общего с формулой Ньютона (2), после замены производной на (3). Знаменатель в формуле (4) есть не что иное, как среднее значение производной $f'(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$.

4.Метод хорд

Этот метод вместе с методом бисекции относится к методам дихотомии – как отрезок делится на две части, но на этот раз **неравными**. Точка деления отрезка находится как точка пересечения отрезка, проведенного между точками $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, с осью OX по формуле, аналогичной (4):

$$x = a - \frac{f(a)}{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}} \quad (5)$$

Новые значения a и b вычисляются так же, как и в методе бисекции – в зависимости от знаков на границах новых отрезков $[a, x]$ и $[x, b]$.



При выполнении итераций по методу хорд может оказаться, что к корню приближается только левая или только правая граница отрезка $[a, b]$. Поэтому в качестве меры близости к корню здесь следует применить величину перемещения границы при очередной итерации, которая равна:

$$d = \begin{cases} x - a, & \text{если корень справа от } x \text{ и перемещаем } a, \\ b - x, & \text{если корень слева от } x \text{ и перемещаем } b. \end{cases}$$

Необходимая точность будет достигнута при выполнении после очередной итерации неравенства:

$$|d| < \varepsilon$$

Полученное значение приближения x надо взять в качестве искомого значения корня.

5.Метод простых итераций

Метод простых итераций предназначен для нахождения корня функционального уравнения вида

$$x = \varphi(x) \quad (6)$$

Уравнение вида $f(x)=0$ всегда можно преобразовать к виду (6).

Действительно, умножим левую и правую части уравнения на некоторый коэффициент c . Полученное уравнение $c*f(x) = 0$ очевидно имеет те же корни, что и исходное уравнение. Теперь, добавив x к левой и правой части, получим уравнение $x + c*f(x) = x$, корни которого опять те же, что и у исходного уравнения (1). Обозначив $x + c*f(x) = \varphi(x)$, мы приходим к уравнению (6). Коэффициент c следует выбирать так, чтобы во всех точках отрезка $[a, b]$ соблюдалось неравенство

$$|\varphi'(x)| < 0,5 \quad (7)$$

Следует заметить, что для всех вариантов функций, в которых предполагается применение метода простых итераций, в таблице вариантов задана $f(x)$ такого вида, что переход к уравнению вида (6) элементарен (возьмите коэффициент $c=1/2$, т.е $\varphi(x) = x + 1/2*f(x)$, и, если метод не сойдётся, уменьшите его в два раза).

Метод простых итераций подобно методу Ньютона предполагает применение одного начального приближения. Перед первой итерацией значение начального приближения x_1 может быть получено, как середина отрезка $[a, b]$.

Следующее приближение получают по правилу:

$$x_2 = \varphi(x_1) \quad (8)$$

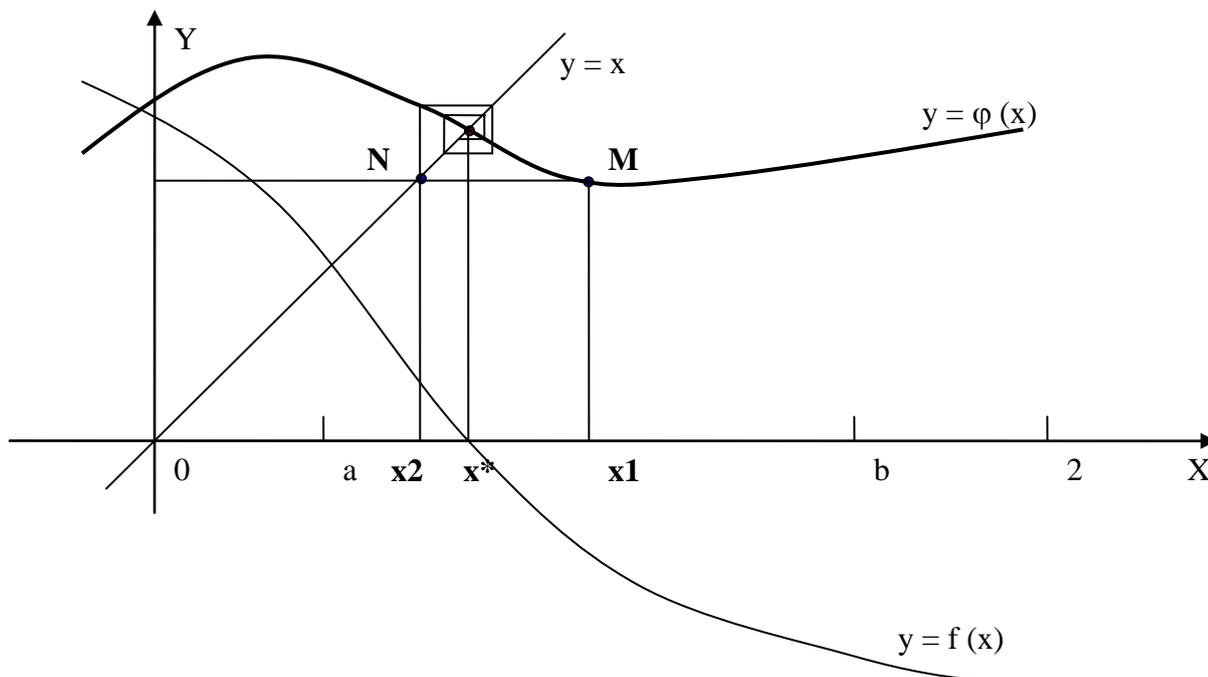


Рисунок иллюстрирует правило (8) для вычисления следующего приближения по методу простых итераций. На этом рисунке точка M имеет координаты $(x_1, \varphi(x_1))$, точка N — координаты $(x_2, \varphi(x_1))$.

После вычисления приближения x_2 заменим значение начального приближения x_1 на значение только что полученного приближения x_2 и выполним следующую итерацию.

Можно доказать, что при выполнении условия (7) метод простых итераций сходится, а требуемая точность будет достигнута, если после вычисления x_2 при очередной итерации соблюдается условие:

$$|x_2 - x_1| < \varepsilon$$

При выполнении этого неравенства итерационный процесс уточнения приближенного значения корня следует прекратить и в качестве искомого приближенного значения корня взять последнее полученное значение x_2 .